PART3　2 次関数の最大・最小（軸の移動）

例題

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 2$ である関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 4$ である関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。

第 6 講　PART3　確認問題

1　a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 6$ である関数
$f(x) = -3x^2 + 6ax + 2a + 1$ の最小値を求めよ。ただし，
答えは下の①から⑦のうちから最適なものを選べ。

$a <$ [ア] のとき　　最小値 [イ]

$a =$ [ア] のとき　　最小値 [ウ]

[ア] $< a$ のとき　　最小値 [エ]

①　1　　②　3　　③　7　　④　$2a+1$

⑤　$38a-107$　　⑥　$3a^2+2a+1$　　⑦　0

2　a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 6$ である関数
$f(x) = -3x^2 + 6ax + 2a + 1$ の最大値を求めよ。ただし，
答えは下の①から⑦のうちから最適なものを選べ。

$a <$ [オ] のとき　　最大値 [カ]

[オ] $\leqq a \leqq$ [キ] のとき　　最大値 [ク]

[キ] $< a$ のとき　　最大値 [ケ]

①　1　　②　6　　③　7　　④　$2a+1$

⑤　$38a-107$　　⑥　$3a^2+2a+1$　　⑦　0

PART3　２次関数の最大・最小（軸の移動）

例題

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 2$ である関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　(2)　最大値を求めよ。

$f(x)=(x-a)^2-a^2+1$ より，グラフの軸は $x=a$

(1)(i)　$a<0$ のとき

この関数のグラフは下図(i)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=1$

(ii)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

この関数のグラフは下図(ii)の実線部分。よって，最小値は $f(a)=-a^2+1$

(iii)　$2<a$ のとき

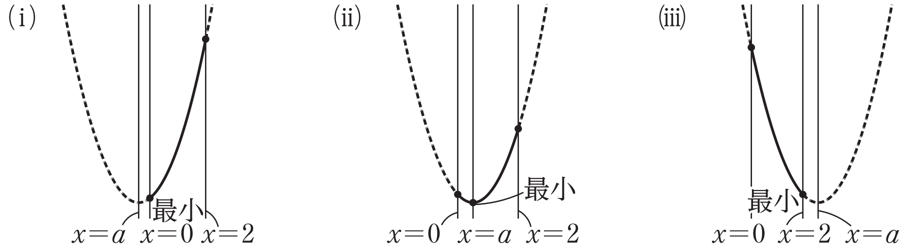
この関数のグラフは下図(iii)の実線部分。よって，最小値は $f(2)=-4a+5$

(i)〜(iii)より

$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 1

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-a^2+1$

$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $-4a+5$



(2)　定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央は $x=1$

(iv)　$a<1$ のとき

この関数のグラフは下図(iv)の実線部分。よって，最大値は $f(2)=-4a+5$

(v)　$a=1$ のとき

この関数のグラフは下図(v)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=f(2)=1$

(vi)　$1<a$ のとき

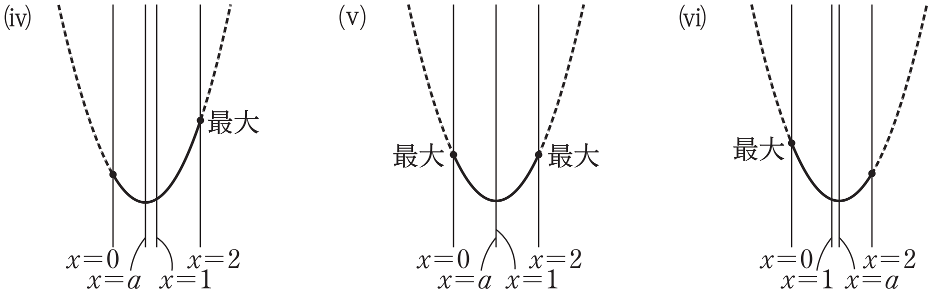
この関数のグラフは下図(vi)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=1$

(iv)〜(vi)より

$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-4a+5$

$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 1

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 1



練習

a は定数とする。定義域が $0\leqq x\leqq 4$ である関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$f(x)=-2x^2+4ax+4a+1=-2(x-a)^2+2a^2+4a+1$ より，グラフの軸は $x=a$

(1)　定義域 $0\leqq x\leqq 4$ の中央は $x=2$

(i)　$a<2$ のとき

この関数のグラフは下図(i)の実線部分。よって，最小値は $f(4)=20a-31$

(ii)　$a=2$ のとき

この関数のグラフは下図(ii)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=f(4)=9$

(iii)　$2<a$ のとき

この関数のグラフは下図(iii)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=4a+1$

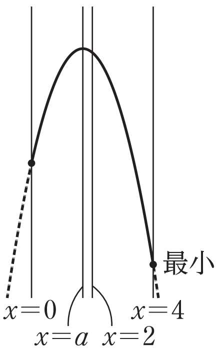
(i)〜(iii)より

$a<2$ のとき　$x=4$ で最小値 $20a-31$

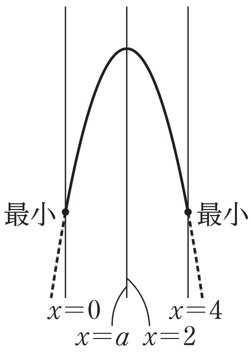
$a=2$ のとき　$x=0,\ 4$ で最小値 9

$2<a$ のとき　$x=0$ で最小値 $4a+1$

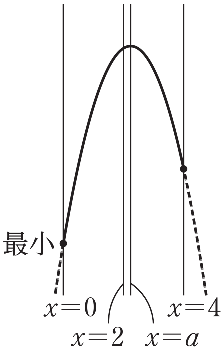
(i)



(ii)



(iii)



(2)(iv)　$a<0$ のとき

この関数のグラフは下図(iv)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=4a+1$

(v)　$0 \leqq a \leqq 4$ のとき

この関数のグラフは下図(v)の実線部分。よって，最大値は $f(a)=2a^2+4a+1$

(vi)　$4<a$ のとき

この関数のグラフは下図(vi)の実線部分。よって，最大値は $f(4)=20a-31$

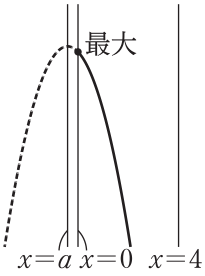
(iv)～(vi)より

$a<0$ のとき　$x=0$ で最大値 $4a+1$

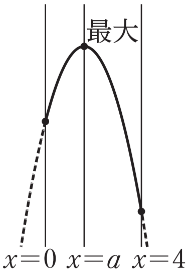
$0 \leqq a \leqq 4$ のとき　$x=a$ で最大値 $2a^2+4a+1$

$4<a$ のとき　$x=4$ で最大値 $20a-31$

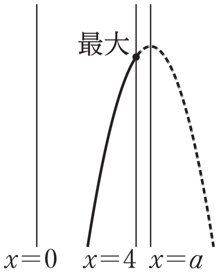
(iv)



(v)



(vi)



第 6 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：⑤，ウ：③，エ：④

[解説]

$f(x)=-3x^2+6ax+2a+1$

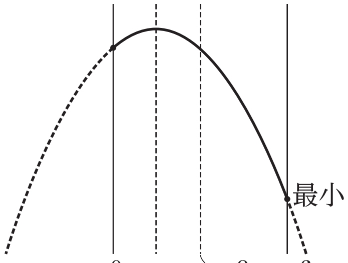
$\quad=-3(x-a)^2+3a^2+2a+1$

よって，このグラフの軸は　$x=a$

定義域 $0 \leqq x \leqq 6$ の中央は　$x=3$

$a<3$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]

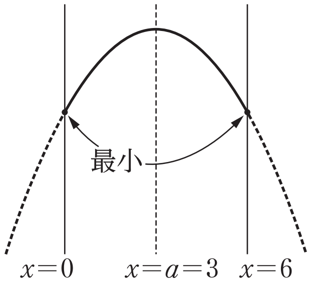
[A]　グラフが上に凸の放物線である 2 次関数の最小は，軸が定義域の中央より左にある場合，中央にある場合，中央より右にある場合で場合分けを行い求める。



よって，$x=6$ で

最小値　$f(6)=\mathbf{38}\boldsymbol{a}\mathbf{-107}$

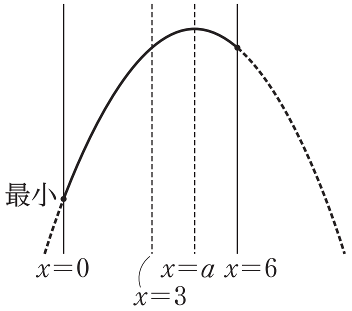
$a=3$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]



よって，$x=0$，6 で

最小値　$f(0)=f(6)=\mathbf{7}$

$3<a$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]



よって，$x=0$ で

最小値　$f(0)=\mathbf{2a+1}$

2 **[正解]** オ：⑦，カ：④，キ：②，ク：⑥，ケ：⑤

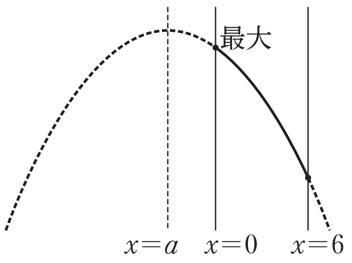
[解説]

$f(x)=-3x^2+6ax+2a+1$

$\quad=-3(x-a)^2+3a^2+2a+1$

よって，このグラフの軸は　$x=a$

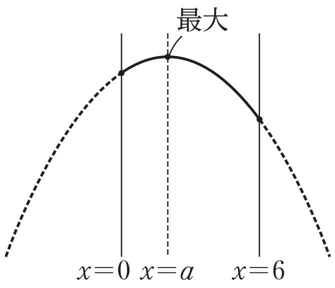
$a<0$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=0$ で

最大値　$f(0)=\mathbf{2a+1}$

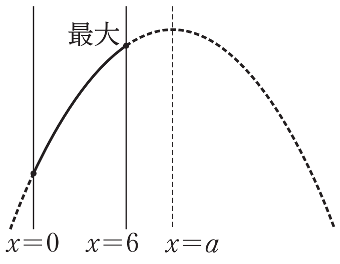
$0\leqq a\leqq 6$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=a$ で

最大値　$f(a)=\mathbf{3a^2+2a+1}$

$6<a$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=6$ で

最大値　$f(6)=\mathbf{38a-107}$

[B]　グラフが上に凸の放物線である 2 次関数の最大は，軸が定義域の左外にある場合，定義域に含まれる場合，定義域の右外にある場合で場合分けを行い求める。